Kapitola 5

DERIVACE FUNKCE

Princip derivování formulovali v 17. století nezávisle na sobě německý matematik G.W. Leibniz (na základě úvah o tečně ke grafu funkce) a anglický fyzik I. Newton (úvahami o okamžité rychlosti). Derivace funkce má zásadní význam při vyšetřování funkčních závislostí nejen v matematice, ale také v aplikacích, např. v chemii, fyzice, ekonomii a jiných vědních oborech.

5.1 Derivace funkce a její geometrický význam

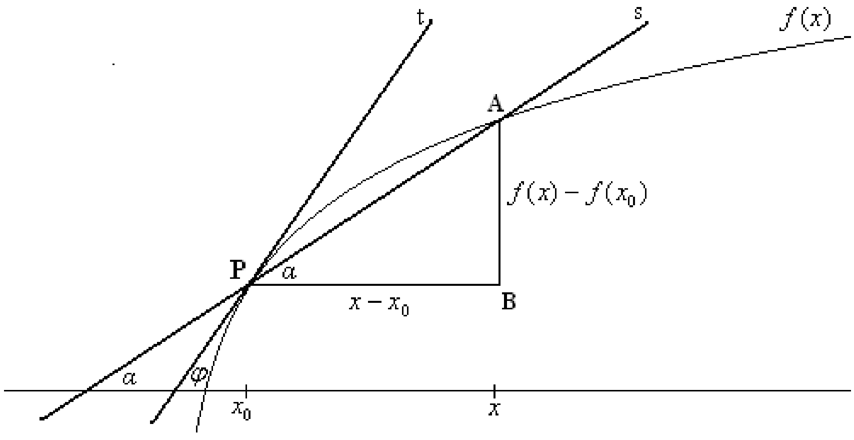
K vyjádření rychlosti změny hodnot funkce $y = f(x)$ při změnách veličiny *x* je možné použít směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Připomeňme, že směrnice *k* přímky $y = kx + q$ je tangens úhlu α, který svírá přímka s kladnou částí osy *x*. Je-li směrnice *k* kladná, funkce roste, je-li záporná, funkce v daném bodě klesá. Rychlost růstu (případně klesání) je vyjádřená velikostí čísla *k*. Pro hodnoty směrnice *k* blízké nule je úhel α a tedy i růst funkce malý, pro $k > 1$ (tedy pro $\alpha > \frac{\pi}{4}$) je růst funkce rychlejší.

Určení směrnice tečny ke grafu funkce

Budeme se snažit určit směrnici tečny *t* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0.

Nejprve vyjádříme velikost úhlu α, který svírá s kladnou částí osy *x* sečna *s*, určená body *P* a *A*. Tento úhel vypočítáme pomocí pravoúhlého trojúhelníka *APB*.

Platí $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Tečnu *t* pak můžeme považovat za limitní případ sečny *s*, pokud se bod *A* bude neomezeně blížit k bodu *P* po grafu funkce $y = f(x)$. Směrnici k_t této tečny *t* (tedy $\operatorname{tg}\varphi$) můžeme vyjádřit jako limitu $k_t = \operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Výraz $\Delta x = x - x_0$ budeme nazývat přírůstkem (nebo diferencí) proměnné *x* v bodě x_0, výraz $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ budeme nazývat přírůstkem (nebo diferencí) funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Derivace funkce

Definice 5.1.: Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v okolí bodu x_0. Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme konečnou limitu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Značíme ji $f'(x_0)$.

Pokud není funkce $f(x)$ v bodě x_0 definovaná nebo pokud uvedená limita neexistuje, nemá funkce v bodě x_0 derivaci.

Je-li limita z definice 5.1. nevlastní, jde o nevlastní derivaci. Pokud nebude uvedeno jinak, budeme mít však v dalším textu na mysli vždy vlastní derivaci.

Derivaci funkce $y=f(x)$ značíme symbolem $f'(x)$ nebo stručně y'. Někdy se derivace zapisuje rovněž ve tvaru $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, kde výrazy $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ se nazývají diferenciály.

Příklad 5.1.

Určete derivaci funkce $y=x^2$ v bodě $x=1$.

Řešení: Za základě definice derivace je $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

Geometrický význam derivace

Jak vyplývá z úvodní úlohy, vyjadřuje derivace $f'(x_0)$ směrnici $k=\mathrm{tg}\varphi$ tečny *t*, sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P=[x_0, f(x_0)]$.

Tato tečna má rovnici : $y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$.

Normála je přímka, která prochází bodem *P* kolmo k tečně *t*. Vzhledem k tomu, že pro směrnice kolmých přímek tečny a normály platí $k_t\cdot k_n=-1$, má normála rovnici :

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Příklad 5.2.

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f: y=2x^2+4x-1$ v bodě $A=[1, f(1)]$.

Řešení: Nejprve určíme druhou souřadnici bodu *A*, ve kterém se tečna dotýká grafu funkce : $f(1)=2.1^2+4.1-1=5$.

Směrnici k tečny určíme jako derivaci dané funkce v bodě *A*.

V našem případě $k=f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2+4x-1)-(2.1^2+4.1-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2.(x^2+2x-3)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2.(x+3).(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}[2.(x+3)]=8$.

Po dosazení do rovnice tečny $y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$ je $y-5=8.(x-1)$ a po úpravě bude mít rovnice tečny tvar $8x-y-3=0$.

Po dosazení do rovnice normály $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$ dostaneme $y-5=-\dfrac{1}{8}.(x-1)$, po úpravě bude mít rovnice normály tvar $x+8y-39=0$.

Jako limitu podílu přírůstku funkce a přírůstku proměnné je možné vyjádřit také okamžitou rychlost pohybujícího se bodu. Jestliže se těleso pohybuje přímočaře a jeho dráha *s* je funkcí času *t*, pak jeho okamžitá rychlost *v* v okamžiku t_0 je daná vztahem $v_0 = s'(t_0)$. Ve fyzice bývá zvykem značit derivaci podle proměnné *t* (podle času) tečkou, proto píšeme $v = \dot{s}(t)$. Podobně, jestliže průběh fyzikální veličiny *m* je funkcí času *t*, potom okamžitá změna *v* této veličiny v čase *t* je daná vztahem $v = \dot{m}(t)$. Tímto způsobem můžeme popsat rychlost chemické reakce, intenzitu elektrického proudu, rychlost růstu populace, rychlost růstu firmy a devalvace v ekonomii a celou řadu dalších veličin z různých oblastí přírodních a technických věd.

Poznámka: 1) Říkáme, že funkce má derivaci na intervalu **I**, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Zatímco derivace v bodě x_0 je číslo $f'(x_0)$, derivace na intervalu **I** je funkce $f'(x)$ pro $x \in \mathbf{I}$.

2) Pokud označíme přírůstek $\Delta x = x - x_0$ symbolem *h*, je $x = x_0 + h$. Derivaci pak je možné vyjádřit vztahem $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Příklad 5.3.

Vypočítejte derivaci konstantní funkce $f(x) = c$.

Řešení: Na základě definice derivace a předchozí poznámky platí pro derivaci funkce $f(x) = c$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$. Je tedy $[c]' = 0$.

Příklad 5.4.

Ukažte, že pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ platí $(x^3)' = 3x^2$.

Řešení: Podobně jako v příkladě 5.3. dostáváme :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot h + 3x \cdot h^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 \cdot h + 3x \cdot h^2 + h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3x \cdot h + h^2) = 3x^2 .$$

Poznámka: Nahradíme-li v definici derivace pojem limita pojmem limita zprava (zleva), dostaneme definici derivace zprava (zleva). Značíme ji symbolem $f'_+(x_0)$, resp. $f'_-(x_0)$. Pokud má funkce v bodě x_0 oboustrannou derivaci, má zde i jednostranné derivace a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Pokud mají jednostranné derivace různou hodnotu, nebo pokud některá z nich neexistuje, neexistuje zde ani oboustranná derivace $f'(x_0)$.

Vztah spojitosti a derivace

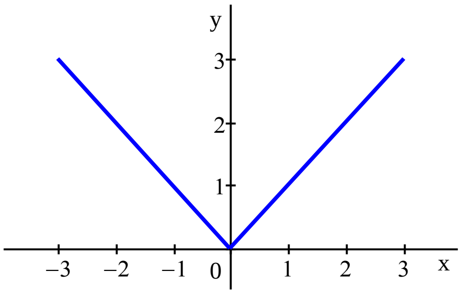
Věta 5.2.: Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Věta opačná k uvedené větě však neplatí. Tedy, je-li funkce v bodě spojitá, nemusí v něm existovat derivace, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 5.5.

Zjistěte, zda má funkce $y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ derivaci.

Řešení: Funkce $y=|x|$ je zřejmě v bodě $x_0=0$ spojitá.



Nemá však v tomto bodě derivaci, protože hodnoty derivace zprava a zleva jsou různé :

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

Jde tedy o příklad funkce, která je v určitém bodě spojitá, ale nemá v něm derivaci.

Je-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 a jeho okolí spojitá, nastávají z geometrického hlediska nejčastěji následující případy (nebo jejich kombinace) :

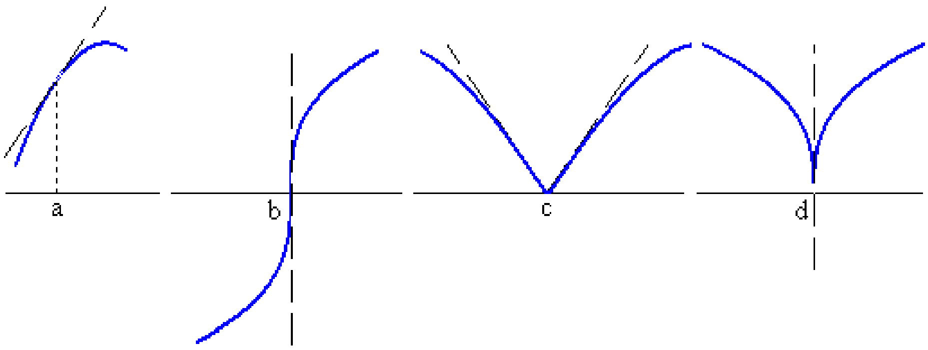
a) Funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci a její tečna má směrnici $k=f'(x_0)$. Tato tečna je různoběžná s osou y (na obrázku bod *a*).

b) Funkce má v bodě x_0 nevlastní derivaci a její tečna ke grafu v tomto bodě je rovnoběžná s osou y (na obrázku bod *b*).

c) Funkce nemá v bodě x_0 derivaci. Potom buď

- v bodě x_0 existují vlastní jednostranné derivace, které mají různé hodnoty. Tyto derivace určují dvě různé polopřímky - tečny grafu v bodě x_0. Takový bod nazýváme **úhlový bod** (na obrázku bod *c*).
- v bodě x_0 existují nevlastní derivace funkce, které mají různé hodnoty. Tyto derivace určují dvě splývající polopřímky rovnoběžné s osou y - tečny ke grafu v bodě x_0. Takový bod nazýváme **bod vratu (**na obrázku bod *d*).

V obou těchto případech má graf v tomto bodě „hrot“ nebo „špičku“ (viz také př. 5.5).



Úlohy 5.1.

1. Určete derivaci funkce f v bodě a :

a) $f: y=2x^2, a=-1,$

b) $f: y=\sqrt{3-x}, a=2,$

c) $f: y=3x^2+x-1, a=0,$

d) $f: y=x^3, a=c,$

e) $f: y=x, a=1,$

f) $f: y=\sin x, a=0.$

2. Napište rovnici tečny t a normály n ke grafu funkce:

a) $f: y = 3x^2 - 2$ v bodě $A = [3, f(3)]$,

b) $f: y = \cos x$ v bodě $A = \left[\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

3. Určete bod a v němž je směrnice tečny ke grafu funkce f rovna k:

a) $f: y = 2x^3$, $k = 6$, b) $f: y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 2$.

4. Vypočítejte jednostranné derivace funkce f v bodě a a rozhodněte zda existuje oboustranná derivace :

a) $a = 0$, $f: y = |\sin x|$, b) $a = 2$, $f: \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{pro } x \neq 2, \\ y = 4 & \text{pro } x = 2, \end{cases}$.

Výsledky úloh 5.1.

1. a) $f'(-1) = -4$, b) $f'(2) = -\frac{1}{2}$, c) $f'(0) = 1$, d) $f'(c) = 3c^2$, e) $f'(1) = 1$, f) $f'(0) = 1$.

2. a) $t:\ 18x - y - 29 = 0$, $n:\ x + 18y - 453 = 0$,

b) $t:\ x + 2y - \frac{\pi + 6.\sqrt{3}}{6} = 0$, $n:\ 2x - y + \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} = 0$.

3. a) $a_1 = -1, a_2 = 1$, b) $a = \frac{\pi}{4}$.

4. a) $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$, tedy derivace $f'(0)$ neexistuje,

b) $f'_-(2) = f'_+(2) = f'(2) = 1$, tedy derivace v bodě $a = 2$ existuje.

5.2 Pravidla a vzorce pro derivování

V příkladech 5.3. a 5.4. z minulé podkapitoly jsme odvodili derivaci dvou funkcí přímo pomocí definice derivace. Abychom však mohli jednoduše počítat derivace všech elementárních funkcí a také derivaci jejich součtu, rozdílu, součinu, podílu a složených funkcí, potřebujeme znát obecnější pravidla pro derivování. Tato pravidla budou nyní uvedena.

Pravidla pro derivování

Věta 5.3.: Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu **I**. Pak pro $x \in \mathbf{I}$ platí :

$$[u(x) + v(x)]' = u(x) + v(x),$$

$$[u(x) - v(x)]' = u(x) - v(x),$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}, \text{ pro } v(x) \neq 0.$$

Poznámka: Je-li $u(x)$ konstantní funkce, tedy $u(x)=c$, pak pro derivaci součinu $c\cdot v(x)$ podle uvedené věty a na základě toho, že $[c]'=0$ (viz př. 5.3.), platí :

$$[c\cdot v(x)]'=c'\cdot v(x)+c\cdot v'(x)=0\cdot v(x)+c\cdot v'(x)=c\cdot v'(x).$$

Vzorce pro derivování základních elementárních funkcí

Věta 5.4.: V bodech, ve kterých jsou základní elementární funkce definované, platí pro jejich derivaci vzorce :

I.	$[c]'=0$	***VIII.***	$[\cos x]'=-\sin x$
II.	$[x^n]'=nx^{n-1}$	***IX.***	$[\operatorname{tg} x]'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
III.	$[a^x]'=a^x\ln a$	***X.***	$[\operatorname{cotg} x]'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
IV.	$[e^x]'=e^x$	***XI.***	$[\arcsin x]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
V.	$[\log_a x]'=\dfrac{1}{x\ln a}$	***XII.***	$[\arccos x]'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
VI.	$[\ln x]'=\dfrac{1}{x}$	***XIII.***	$[\operatorname{arctg} x]'=\dfrac{1}{1+x^2}$
VII.	$[\sin x]'=\cos x$	***XIV.***	$[\operatorname{arcotg} x]'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Příklad 5.6.

Vypočítejte derivaci funkce $f(x)$:

a) $y=3x^5-2x^4+2x+7$, b) $y=\dfrac{x^2.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$, c) $y=\dfrac{x+\sin x}{\cos x}$.

Řešení: Při řešení příkladů využijeme vzorce pro derivování základních elementárních funkcí a pravidla pro derivování.

a) Použijeme vzorce pro derivování konstanty a mocniny, pravidla pro derivování součtu a rozdílu funkcí a pravidlo pro derivaci součinu konstanty a funkce. Derivovanou funkci pak upravíme na co nejjednodušší tvar :

$$y'=(3x^5-2x^4+2x+7)'=3.5.x^4-2.4.x^3+2.1.x^0+7.0=15x^4-8x^3+2.$$

b) Předpis funkce nejprve upravíme podle pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami : $y=\dfrac{x^2.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{11}{6}}$. Upravenou funkci potom derivujeme podle vzorce pro derivování mocniny (vzorec II) : $y'=\left(\dfrac{x^2.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{\frac{11}{6}}\right)'=\dfrac{11}{6}\cdot x^{\frac{5}{6}}=\dfrac{11}{6}\cdot\sqrt[6]{x^5}$.

c) Použijeme pravidlo pro derivování podílu : $y'=\left(\dfrac{x+\sin x}{\cos x}\right)'=$

$$=\frac{(x+\sin x)'.\cos x-(x+\sin x).(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{(1+\cos x).\cos x-(x+\sin x).(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+x\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\cos x+x.\sin x}{\cos^2 x}$ (při úpravě výrazu jsme použili vztah $\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

Úlohy 5.2.

Vypočítejte derivaci funkce $f(x)$:

a) $y=x^5-4x^3+2x-3$, b) $y=\dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$, c) $y=\sqrt{x}.(x^3-\sqrt{x}+1)$, d) $y=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$,

e) $y=3x^2\operatorname{arctg}x$, f) $y=x.\operatorname{cotg}x$, g) $y=\dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x}{2}$, h) $y=(x^2-2x+2)e^x$,

i) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$, j) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, k) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

Výsledky úloh 5.2.

a) $y'=5x^4-12x^2+2$, b) $y'=8.\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$, c) $y'=\dfrac{7x^2\sqrt{x}}{2}-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, d) $y'=-\dfrac{\pi}{x^2}$,

e) $y'=6x.\operatorname{arctg}x+\dfrac{3x^2}{x^2+1}$, f) $y'=\operatorname{cotg}x-\dfrac{x}{\sin^2 x}$, g) $y'=x.\operatorname{arctg}x$, h) $y'=x^2.e^x$,

i) $y'=\dfrac{x.(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$, j) $y'=\dfrac{1}{\cos x-1}$, k) $y'=\dfrac{2}{\sin 2x-1}$.

5.3 Derivace složené funkce, vyšší derivace

Zatím jsme počítali první derivaci základních elementárních funkcí. V aplikacích diferenciálního počtu však často potřebujeme vypočítat i derivace složitějších funkcí a derivace vyšších řádů.

Derivace složené funkce

Věta 5.5.: Nechť složená funkce $y=f(\varphi(x))$ je definovaná v okolí bodu x_0. Má-li funkce $u=\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a funkce $y=f(u)$ má derivaci v bodě $u_0=\varphi(x_0)$, pak má derivaci také složená funkce $y=F(x)=f(\varphi(x))$ a platí $y'=F'(x_0)=f'(u_0).\varphi'(x_0)$.

Derivaci složené funkce v obecném bodě x je možné zapsat vztahem :

$$[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),$$

kde z existence derivace na levé straně rovnosti plyne existence derivací na pravé straně. Derivace složené funkce je tedy rovna součinu derivací jednotlivých složek.

Věta se dá analogicky rozšířit i na derivaci vícesložkových funkcí. Například derivaci třísložkové funkce budeme provádět podle vztahu :

$$[f((g(\varphi(x)))]'=f'(g(\varphi(x)))\cdot g'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Příklad 5.7.

Derivujte složenou funkci: a) $f: y=\sin(1+x^2)$, b) $g: y=\sqrt{\ln(1+\operatorname{tg}x)}$.

Řešení : a) Funkce $f: y=\sin(1+x^2)$ je definovaná pro $x\in\mathbf{R}$.

Označme $\varphi: u=1+x^2$, $f: y=\sin u$.

Derivaci provádíme podle vzorce $[f(\varphi(x))]'=f'(u).\varphi'(x)$, kde v našem příkladě je $\varphi'(x)=2x$ a $f'(u)=\cos u$.

Celkem tedy $y'=\left(\sin(1+x^2)\right)'=\cos u\cdot 2x=2x\cdot\cos(1+x^2)$, kde jsme za u dosadili $1+x^2$.

b) Funkce g je definovaná, pokud $\ln(1+\mathrm{tg}x)\geq 0\Leftrightarrow 1+\mathrm{tg}x\geq 1\Leftrightarrow \mathrm{tg}x\geq 0$.

Označme $u=1+\mathrm{tg}x\Rightarrow u'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $v=\ln u\Rightarrow v'=\dfrac{1}{u}$ a $y=\sqrt{v}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}$.

Celkem tedy dostáváme pro derivaci zadané třísložkové funkce :

$$y'=\left(\sqrt{\ln(1+\mathrm{tg}x)}\right)'=(1+\mathrm{tg}x)'\cdot(\ln u)'\cdot(v^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{2}[\ln(1+\mathrm{tg}x)]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(1+\mathrm{tg}x)}(1+\mathrm{tg}x)\cos^2 x}.$$

!*!Derivace funkce $y=[f(x)]^{g(x)}$

Zatím jsme se při derivování nesetkali s funkcí, která by měla proměnnou x obsaženou v základu i exponentu funkčního předpisu.

Takovou funkci $y=[f(x)]^{g(x)}$ přepíšeme pomocí vztahu $A^B=e^{B.\ln A}$ na tvar $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x).\ln(f(x))}$ a pak ji derivujeme jako složenou exponenciální funkci

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]'=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Příklad 5.8.

Vypočítejte derivaci funkce $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Řešení : Funkce $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ je definovaná pro všechna $x\in\mathbf{R}/\{1\}$. Nejprve přepíšeme funkci pomocí vztahu $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x).\ln(f(x))}$ na tvar $y=e^{x.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$.

Takto upravenou funkci budeme derivovat jako složenou exponenciální funkci :

$$y'=\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right]'=\left[e^{x.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\right]'=\left(e^{x.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\right).\left[x'.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+x.\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)'\right]=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.\left[1.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+x.\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{1.(x-1)-(x+1).1}{(x-1)^2}\right].$$

Po úpravě složeného zlomku dostaneme :

$$y'=\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right]'=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{2x}{1-x^2}\right].$$

Derivace vyšších řádů

Definice 5.6.: Derivace funkce $f(x)$ je opět funkce. Má-li tato funkce $f'(x)$ derivaci, nazýváme ji druhou derivací funkce $f(x)$ a značíme ji $f''(x)$.
Obecně n-tou derivaci funkce $f(x)$ definujeme vztahem

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Třetí derivaci funkce značíme symbolem $f'''(x)$, ale u vyšších derivací už označujeme jejich řád číslem v závorkách : $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, … , $f^{(n)}(x)$.
Kromě uvedeného značení vyšších derivací se používá ve fyzice a technických oborech také značení : $f''(x) = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $f'''(x) = \dfrac{d^3 y}{dx^3}$, ..., $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Příklad 5.9.
a) Určete hodnotu třetí derivace funkce $f:\ y = 4\sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4$.
b) Určete hodnotu druhé derivace funkce $g:\ y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Řešení : a) Postupně vypočítáme první, druhou a třetí derivaci dané funkce.

$y' = 4\cdot\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$, derivací funkce y' dostaneme druhou derivaci $y'' = 2\cdot(-\frac{1}{2})(x)^{-\frac{3}{2}}$,

a její derivací určíme třetí derivaci $y''' = -1\cdot(-\frac{3}{2})(x)^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$.

Na závěr určíme hodnotu třetí derivace v bodě $x_0 = 4:\ y(4)''' = \dfrac{3}{2\sqrt{4^5}} = \dfrac{3}{2\cdot 2^5} = \dfrac{3}{2^6}$.

b) Složenou funkci $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ postupně derivujeme

$$y' = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{-\cos x-\cos x\sin x-\cos x+\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{-\cos x}{1+\sin x} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos x}$$

$$y'' = \left(\frac{-1}{\cos x}\right)' = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Geometrickým významem druhé derivace se budeme zabývat v následující kapitole při vyšetřování průběhu funkce.

Fyzikální význam druhé derivace

V úvodu této kapitoly jsme vyjádřili okamžitou rychlost hmotného bodu v okamžiku t_0 jako první derivaci jeho dráhy s podle času t, tj. $v_0 = \dot{s}(t_0)$.
Druhá derivace dráhy podle času pak vyjadřuje okamžité zrychlení hmotného bodu v okamžiku t_0. Tedy $a_0 = \ddot{s}(t_0)$.

Příklad 5.10.

Hmotný bod se pohybuje podle zákona daného rovnicí $s=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$. Určete jeho rychlost v a zrychlení a v obecném okamžiku t.

Řešení : Okamžitou rychlost vyjádříme jako první derivaci jeho dráhy podle času. Tedy $v=s'(t)$. Pro naše zadání $v=\frac{3}{2}\cdot 2t+\frac{1}{3}\cdot 3t^2=3t+t^2$. Zrychlení je pak druhou derivací jeho dráhy $a=s''(t)$, tj. $a=3.1+2t=3+2t$. Chceme-li rychlost hmotného bodu a zrychlení určit v konkrétním čase, například po pěti sekundách od okamžiku pohybu, stačí do těchto vztahů dosadit $t=5$ a dostaneme : $v(5)=40$ m/s a $a(5)=13$ m/s^2 (kde m/s^2 je základní jednotka zrychlení).

Derivace implicitně zadané funkce

Při řešení některých problémů hledáme tečny ke křivce, která není grafem funkce (např. kružnice, elipsa nebo hyperbola) a je dána implicitně rovnicí $F(x,y)=0$. Není tedy možné z rovnice vyjádřit proměnnou y (např. z rovnice elipsy $16x^2+25y^2=400$). Derivaci této funkce můžeme provádět tak, že členy s proměnnou y derivujeme jako složenou funkci (y je funkcí x), tedy např. $(y^2)'=(y^2)'\cdot(y)'=2y\cdot y'$ a ostatní členy derivujeme obvyklým způsobem.

Implicitní funkce

Definice 5.7.: Je-li rovnicí $F(x,y)=0$ určena na nějakém intervalu **I** funkce $y=f(x)$ tak, že $F(x,f(x))=0$ pro všechna $x\in\mathbf{I}$ nazývá se funkce $y=f(x)$ implicitní funkcí určenou rovnicí $F(x,y)=0$.

Derivaci implicitní funkce dostaneme derivováním rovnosti $F(x,f(x))=0$ podle proměnné x, kde složená funkce $F(x,y)$ má složky $x=x,\ y=f(x)$.

Příklad 5.10.

Vypočtěte derivaci funkce $f(x)$ zadané implicitně rovnicí $x^3+y^3-3xy=0$.

Řešení: Členy y derivujeme jako složenou funkci proměnné x a ostatní členy derivujeme obvyklým způsobem :

$$3x^2+3y^2.y'-3.(1.y+x.y')=0.$$

Z této rovnice vyjádříme y' (nejprve celou rovnici vykrátíme 3, roznásobíme závorku, výrazy s y' ponecháme na levé straně rovnice a zbývající výrazy převedeme na stranu pravou, na levé straně vytkneme y' a pak vydělíme) a dostaneme derivaci implicitně zadané funkce ve tvaru $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

Úlohy 5.3.

1. Určete derivace složené funkce f :

a) $y=\cos^2 x$, b) $y=\cos 2x$, c) $y=(x^5+2x+1)^7$, d) $y=x^2.\sqrt{1+x^2}$, e) $y=\sin^2(x^2-3x)$,

f) $y=\arcsin\dfrac{x}{x^2+1}$, g) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$, h) $y=\ln\cos\dfrac{x-1}{x}$, i) $y=e^{\sqrt{x^2+x+1}}$,

j) $y=2^{\arcsin 3x}+(1-\arccos 3x)^2$, k) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$,

l) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

2. Určete derivace funkcí typu $y=f(x)^{g(x)}$: a) $y=x^x$, b) $y=\sqrt[x]{x}$, c) $y=x^{\sin x}$,

d) $y=(\cos x)^{\sin x}$, e) $y=(\mathrm{arctg}x)^x$, f) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

3. Určete derivaci druhého řádu funkce : a) $y=\dfrac{x-1}{3x^2}$, b) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$, c) $y=xe^{-x^2}$.

4. Určete derivace funkce dané implicitně : a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, b) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$, c) $\mathrm{tg}y-xy=0$,

d) $\mathrm{arctg}(x+y)=x$, e) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2$, f) $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=0$.

5. Kolmý vrh vzhůru se skládá ze dvou pohybů, z rovnoměrného $s_1=v_0.t$ (v_0 je počáteční rychlost s jakou byl předmět vyhozen do výše) a z volného pádu, který působí proti prvnímu pohybu na základě rovnice $s_2=\dfrac{1}{2}g.t^2$ ($g\cong 10\mathrm{m/s^2}$). Tedy dráha při kolmém vrhu vzhůru dána rovnicí $s=s_1-s_2$, tj. $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$. Určete okamžitou rychlost a zrychlení v čase t.

Výsledky úloh 5.3.

1. a) $y'=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x$, b) $y'=-2\sin 2x$, c) $y'=7.(x^5+2x+1)^6.(5x^4+2)$,

d) $y'=\dfrac{2x+3x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, e) $y'=2\sin(x^2-3x).\cos(x^2-3x).(2x-3)=(2x-3)\sin(2x^2-6x)$,

f) $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2).\sqrt{x^4+x^2+1}}$, g) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, h) $y'=-\dfrac{1}{x^2}.\mathrm{tg}\dfrac{x-1}{x}$, i) $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$,

j) $y'=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.\left[2^{\arcsin 3x}\ln 2+2.(1-\arccos 3x)\right]$, k) $y'=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, l) $y'=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

2. a) $y'=x^x.(1+\ln x)$, b) $y'=\sqrt[x]{x}.\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, c) $y'=x^{\sin x}.\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$,

d) $y'=(\cos x)^{\sin x}.(\cos x.\ln\cos x-\sin x.\mathrm{tg}x)$, e) $y'=(\mathrm{arctg}x)^x.\left[\ln(\mathrm{arctg}x)+\dfrac{x}{(1+x^2).\mathrm{arctg}x}\right]$,

f) $y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x.\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

3. a) $y''=\dfrac{2(x-3)}{3x^4}$, b) $y''=\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$, c) $y''=2xe^{-x^2}(2x^2-3)$.

4. a) $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, b) $y'=\dfrac{1-y^3}{3xy^2+4y^3+1}$, c) $y'=\dfrac{y.\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$, d) $y'=(x+y)^2$, e) $y'=\dfrac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}}$,

f) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$. 5. $v=v_0-gt$, $a=-g$.

Shrnutí kapitoly

Vysvětlení pojmu derivace funkce a jejího geometrického významu.

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definovaná jako limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Značíme ji $f'(x_0)$. Z geometrického hlediska vyjadřuje tato hodnota směrnici tečny t sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P=[x_0, f(x_0)]$.

Počítání derivace funkce podle základních vzorců a pravidel.
Pro počítání derivací elementárních funkcí a také derivaci jejich součtu, rozdílu, součinu a podílu máme vzorce, které je potřeba se dobře naučit.
Počítání derivace složené funkce a derivace vyšších řádů.
Derivace složené funkce je rovna součinu derivací jednotlivých složek. Provádí se pomocí vztahu : $[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.
Derivací funkce $f'(x)$ dostaneme derivaci 2. řádu. Tedy $(f'(x))' = f''(x)$. Analogicky počítáme derivace vyšších řádů.

Klíčové pojmy

- derivace funkce,
- tečna ke grafu funkce,
- pravidla a vzorce pro derivování,
- derivace složené funkce,
- derivace implicitní funkce,
- derivace vyššího řádu.

Samostatný test

A. Teoretická část
1. Derivace $f'(x)$ v bodě x_0 je rovna:
a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}$, b) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-x_0}{x-x_0}$, d) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
2. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:
a) Jestliže není funkce $f(x)$ v bodě x_0 definovaná, nemá funkce v bodě x_0 derivaci.
b) Derivace funkce v bodě i na intervalu je číslo.
c) Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivace na intervalu **I** a $v(x)\neq 0$, pak pro každé $x\in\mathbf{I}$ platí : $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x).v(x)+u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$.
3. Symbolem $f^{(4)}(x)$ označujeme:
a) čtvrtou mocninu funkce $f(x)$,
b) čtvrtou derivaci funkce $f(x)$,
c) hodnotu derivace $f'(x)$ pro $x=4$.

4. Opravte chyby ve vzorcích pro derivování základních elementárních funkcí:
a) $\left[x^n\right]' = (n-1)x^n$, b) $\left[e^x\right]' = x.e^{x-1}$, c) $[\sin x]' = -\cos x$, d) $[\arccos x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
e) $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
5. Rovnice $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ je rovnicí : a) tečny, b) sečny, c) normály, sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$.
6. Zformulujte větu o existenci $f'(x_0)$ vzhledem k existenci $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$.
7. Funkce $y' = 2 - \dfrac{1}{x}$ vznikla derivováním funkce : a) $y = 2x - \ln|x|$, b) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$,
c) $y = 2x - e^x$.

B. Praktická část

1. Odvoďte derivaci funkce $f(x) = 1 - x^2$.
2. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$:
a) $f(x) = x^3 - 2,\ x_0 = 1$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = -1$, c) $f(x) = -x^2 + 4,\ x_0 = \dfrac{1}{2}$,
d) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Napište rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$:
a) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1$, b) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x_0 = 1$,
d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Vypočtěte jednostranné derivace funkce v bodě x_0 a rozhodněte o oboustranné derivaci:
a) $f: y = |x-3|,\ x_0 = 3$, b) $f: \begin{cases} y = -x^2 + 4x & \text{pro } x < 0, \\ y = x^2 - 1 & \text{pro } x \ge 0, \end{cases}\ x_0 = 0$,
c) $f: y = |x| - x,\ x_0 = 0$.
5. Vypočtěte první derivaci funkce f:
a) $y = \dfrac{1-x^2}{1+2x}$, b) $y = x\ln x - x$, c) $x.10^x$, d) $y = \sin^2 x - 3\cos^2 x$, e) $y = \sqrt{9-x^2} - 3\arcsin\dfrac{x}{3}$,
f) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$, g) $y = e^{\sqrt{x-1}}$.
6. Vypočítejte derivaci funkce f vyznačeného řádu:
a) $f: y = \dfrac{1}{x^3-1},\ f''$, b) $f: y = x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x},\ f'''$.
7. Derivujte implicitně zadanou funkci: a) $x^2 + y^2 = r^2$, b) $\ln(xy) + x = 4$.